

正定値対称行列

実数を要素とする正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が

$$A^T = A$$

を満たすとき、 A は (n 次の) 対称行列であるという。対称行列 A の固有値は実数である。
実正方行列 U で

$$U^T U = I$$

(ただし、 I は単位行列) を満たすものを直交行列という。 n 次の対称行列 A に対して直交行列 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して、

$$Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (1)$$

とできる。ただし、(1) の右辺は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ を対角要素とする n 次の対角行列を表す：

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

ここで Q の列ベクトルを

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{array} \right]$$

とおくと、(1) は

$$A \mathbf{q}_j = \lambda_j \mathbf{q}_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

と表され、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は A の固有値であり、 $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ はそれに対応する固有ベクトルである。

対称行列 A が、 $\mathbf{0}$ でない任意のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ を満たすとき、 A は正定値であるという。また、 $-A$ が正定値であるとき、 A は負定値であるという。 A が正定値であるとき、 $A \succ \mathbf{0}$ と書く（不等式の右辺はゼロ行列）。

対称行列 A に関して、以下の四つの条件は互いに等価である：

- (a) $A \succ \mathbf{0}$ (つまり、 $\mathbf{0}$ でない任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ が成り立つ)。
- (b) A の固有値はすべて正である。
- (c) ある直交行列 Q と対角要素がすべて正の対角行列 D を用いて、 $A = Q D Q^T$ と書ける。
- (d) $A = S S^T$ を満たす正則行列 S が存在する。

ここで、正方行列 S が正則であるとは S の逆行列が存在することである。これは、条件 $\det S \neq 0$ と等価である。

例として、2 次の対称行列の場合を考える。 A を

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

とおく。このとき、 $\operatorname{tr} A = a + c = \lambda_1 + \lambda_2$ 、 $\det A = ac - b^2 = \lambda_1 \lambda_2$ である。従って、 A が正定値であるための必要十分条件は、 $a + c > 0$ および $ac - b^2 > 0$ が成り立つことである。

次に、対称行列 A が、任意のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} \geq 0$ を満たすとき、 A は半正定値であるという。また、 $-A$ が半正定値であるとき、 A は半負定値であるという。 A が半正定値であるとき、 $A \succeq O$ と書く。

対称行列 A に関して、以下の四つの条件は互いに等価である：

- (a) $A \succeq O$ (つまり、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} \geq 0$ が成り立つ)。
- (b) A の固有値はすべて非負 (つまり、0 以上) である。
- (c) ある直交行列 Q と対角要素がすべて非負の対角行列 D を用いて、 $A = QDQ^\top$ と書ける。
- (d) $A = SS^\top$ を満たす正方行列 S が存在する。

たとえば、行列 $\mathbf{a}\mathbf{a}^\top$ ($\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ はベクトル) は、 n 次の半正定値対称行列である。また、行列 $\sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^\top$ ($\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^n$ は線形独立なベクトル) は、ランクが m の n 次半正定値対称行列である。

一般に、微小変形を仮定するとき、弾性構造物の剛性行列は半正定値対称行列である。また、安定な弾性構造物の剛性行列は正定値対称行列である。

演習問題

- 1) 正定値対称行列のすべての対角要素は正であることを示せ。
- 2) 対称行列

$$S = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline C^\top & B \end{array} \right]$$

が正定値ならば、 A および B も正定値であることを示せ。

- 3) S を正則行列とする。 A が正定値対称行列ならば、 $S^\top A S$ も正定値であることを示せ。
- 4) A が正定値対称行列で、 $\alpha > 0$ ならば、 αA も正定値であることを示せ。
- 5) A, B が正定値対称行列ならば、 $A + B$ も正定値であることを示せ。
- 6) A, B が正定値対称行列ならば、ブロック対角行列

$$S = \left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array} \right]$$

も正定値であることを示せ。

7) 対称行列

$$S = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline C^\top & B \end{array} \right]$$

において、 A が正定値であることを仮定する。行列 $B - C^\top A^{-1}C$ を、 S における A の Schur の補元とよぶ。 S が正定値であるための必要十分条件は、 $B - C^\top A^{-1}C$ が正定値であることを示せ（ヒント：等式

$$\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C^\top A^{-1} & I \end{array} \right] S \left[\begin{array}{c|c} I & -CA \\ \hline O & I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B - C^\top A^{-1}C \end{array} \right]$$

が成り立つことを用いる）。

参考文献

- [1] R. A. Horn, C. R. Johnson: *Matrix Analysis (2nd ed.)*. Cambridge University Press, New York (2013).
- [2] 室田 一雄, 杉原 正顕: 『東京大学工学教程・線形代数 I』. 丸善出版 (2015).
- [3] G. ストラング (井上昭・訳) : 『線形代数とその応用』. 産業図書 (1978).

(2016 年 6 月, 寒野)